

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 26. 02. 2017

Clasa a X- a

1. a) Să se determine partea întreagă a numărului $\log_2 3 + \log_3 2$.

b) Să se arate că $\frac{\log_a x}{\log_{bc} x} + \frac{\log_b x}{\log_{ac} x} + \frac{\log_c x}{\log_{ab} x} \geq 6$, pentru $a, b, c, x > 1$.

2. Fie numerele complexe z_1, z_2, z_3 cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right) = 0$.

a) Să se arate că $(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = 3$.

b) Să se calculeze $|z_1 + z_2 + z_3|$.

3. a) Să se determine $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $3^x - 2^x < 5$.

b) Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ dacă
$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^y + 3^x = 11 \end{cases}$$

4. Fie $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ cu proprietatea că $f(f(x)) = -x$ pentru orice $x \in \mathbb{Z}$

a) Să se arate că $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{Z}$

b) Să se arate că f este bijectivă.

c) Să se dea exemplu de o astfel de funcție.

₁Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

₂Toate problemele sunt obligatorii;

₃Fiecare problemă se notează de la 0 la 7